

## Analiza zespolona Lista 1

Wprowadźmy na zbiorze  $\mathbb{R}^2$  uporządkowanych par liczb rzeczywistych następujące działania „+” i „·”:

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Trójka  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  jest ciałem. Ciało to nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy przez  $\mathbb{C}$ . Elementy ciała  $\mathbb{C}$  nazywamy *liczbami zespolonymi*.

Utożsamiając liczbę  $a$  z parą  $(a, 0)$  otrzymujemy naturalne zanurzenie ciała liczb rzeczywistych w ciało liczb zespolonych. Przyjmując oznaczenia:  $a := (a, 0)$ ,  $i := (0, 1)$ , liczba zespolona przybiera postać

$$z = (a, b) = a + ib, \quad \text{gdzie } i^2 = i \cdot i = -1.$$

Liczbę  $a$ , w tym przedstawieniu, nazywamy częścią rzeczywistą i oznaczamy  $\operatorname{Re} z$ , natomiast liczbę  $b$  nazywamy częścią urojoną i oznaczamy  $\operatorname{Im} z$ .<sup>1</sup>

Liczbę zespoloną  $(a, -b) = a - ib$  nazywamy sprzężoną z liczbą  $z = (a, b) = a + ib$  i oznaczamy  $\bar{z}$ .

**Zad 1.** Wykazać, że dla  $z, w \in \mathbb{C}$  zachodzi

- |   |  |
|---|--|
| a) $\bar{\bar{z}} = z$ ,                            | d) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,                         |
| b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,         | e) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ,                        |
| c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ , | f) $z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ . |

**Zad 2.** Przedstawić liczbę zespoloną w postaci biegunowej (trygonometrycznej).

**Zad 3.** Podać interpretację geometryczną mnożenia dwu liczb zespolonych. Wyciągnąć stąd następujące wnioski:

- 1)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ , dla dowolnych  $z, w \in \mathbb{C}$ ,
- 2)  $|z|^2 = z\bar{z}$ , dla każdego  $z \in \mathbb{C}$ ,
- 3) wzór Moivre'a:  $z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ , gdzie  $\varphi = \arg z$ ,
- 4) istnieje dokładnie  $n$  pierwiastków  $n$ -tego stopnia z liczby zespolonej  $a \neq 0$ .

**Zad 4.** Wyznaczyć sumę oraz iloczyn wszystkich pierwiastków  $n$ -tego stopnia z jedynki.

**Zad 5.** Korzystając z własności modułu i sprzężenia liczb zespolonych wykazać, że dla dowolnych  $z, w \in \mathbb{C}$  zachodzi:

- 1)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (*nierówność trójkąta*),
- 2)  $\left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|$ ,
- 3)  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$  (*tożsamość równoległoboku*).

---

<sup>1</sup>Re od *realis*, Im od *imaginarius*